

Zu den höher angeregten Zuständen leichter Kerne

Von A. FLORIAN, P. URBAN (Graz) und K. WILDERMUTH (München)

Aus den Instituten für theoretische Physik der Universitäten Graz und München

(Z. Naturforschg. 9a, 748—757 [1954]; eingegangen am 31. Mai 1954)

Für den Grundzustand und einen Anregungszustand von O^{16} sowie für den Grundzustand von N^{16} werden einfache Näherungsfunktionen aufgestellt. Das Ritzsche Variationsverfahren (Parameter $a = Mw/\hbar$) ergibt die approximativten Energieniveawerte und damit die Termdifferenzen. Die Abweichungen vom experimentellen Resultat werden diskutiert und daraus Folgerungen für die Zweikörperkräfte gezogen.

Im Laufe der letzten Jahre wurde das Erfahrungsmaterial über die Eigenschaften der leichten Kerne, wie z. B. ihre magnetischen Momente, Quadrupolmomente, Lage der angeregten Energieniveaus usw. stark erweitert. Insbesondere ermöglichten detaillierte Messungen der bei Kernreaktionen auftretenden Winkelkorrelationen sowie Beobachtungen an β - und γ -Spektren die Festlegung zahlreicher experimentell gemessener angeregter Energieniveaus durch Kernspin und Spiegelungscharakter w (Parität). Eine ziemlich vollständige Übersicht geben die Kernberichte von Hornyak, Lauritsen u. a.¹.

In einer zusammenfassenden theoretischen Diskussion des Tatsachenmaterials kam Inglis² zum Schluß, daß sich die Aufeinanderfolge und Verteilung der Niveaus leichter Kerne auf Grund einer Zwischenkopplung, die sich durch Interpolation aus Russel-Saunders- und jj -Kopplung ergibt, in großen Zügen verstehen lassen. Diese Diskussion trägt aber doch sehr stark qualitativen Charakter, da allen Rechnungen das Einteilchenmodell zugrunde gelegt wird und die Parameter der Zwischenkopplung so gewählt werden, daß sich die Lage und Verteilung der Energieniveaus ungefähr richtig ergibt.

Hierzu ist es nötig, daß man die Parameter dieser Kopplung nicht nur bei jedem Kern neu festlegt, sondern diese Parameter ändern sich teilweise sogar von Energieniveau zu Energieniveau bei ein und demselben Kern.

Es taucht daher die Frage auf, ob man mit unserer heutigen Kenntnis über die Kernkräfte, die z. B. aus der Proton-Neutron-Streuung und den

Untersuchungen über die Spin-Bahn-Kopplung von Haxel, Jensen, Suess, Goepert-Mayer u. a. gewonnen wurden, nicht bereits genauere theoretische Aussagen über die Eigenschaften der leichten Kerne machen kann. Ein erster Schritt in dieser Richtung wurde in einer Arbeit von Schulten³ getan. Dort wurden mit Hilfe des Ritzschen Variationsprinzips die Eigenfunktionen der Grundzustände und der ersten angeregten Zustände einer Anzahl leichter Kerne innerhalb der 2p-Schale berechnet und daraus die magnetischen Momente und die Quadrupolmomente sowie die niederen Anregungsniveaus dieser Kerne bestimmt. Die Übereinstimmung dieser Rechnungen mit dem Experiment erreicht bei den Quadrupolmomenten und magnetischen Momenten eine Genauigkeit von etwa 5—20%, dagegen ist die Übereinstimmung der Energieniveaus nicht günstig, worauf wir im Verlaufe dieser Arbeit noch kurz zu sprechen kommen werden. Es sei noch darauf hingewiesen, daß in der Veröffentlichung von Schulten³ automatisch eine Zwischenkopplung der von Inglis² geschilderten Art auftaucht.

Da bei den oben erwähnten Rechnungen nur die Wechselwirkung der Nukleonen in der p-Schale berücksichtigt wurde, mußten bei der Berechnung der Energieniveaus jeweils die Grundzustände der einzelnen Kerne empirisch festgelegt werden. Im Rahmen dieser Rechnungen war es daher nicht möglich, die Energieniveaus verschiedener Kerne und vor allem ihre Grundzustände miteinander zu vergleichen. Weiter wurden nur solche angeregten Zustände betrachtet, die dadurch zustande kommen, daß, korrespondenzmäßig gesprochen, die

¹ W. F. Hornyak, T. Lauritsen, P. Morrison u. W. A. Fowler, Rev. Mod. Phys., **22**, 219 [1950]; F. Ajzenberg u. T. Lauritsen, Rev. Mod. Phys. **24**, 321 [1952].

² D. R. Inglis, Rev. Mod. Phys. **25**, 390 [1953]; D. R. Inglis, Phys. Rev. **87**, 915 [1952].

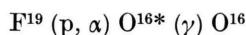
³ R. Schulten, Diss. Göttingen 1952; Z. Naturforschg. **8a**, 759 [1953].



Nukleonen in der 2p-Schale sich auf verschiedene Weise gegeneinander einstellen können. Es wurden aber keine angeregten Niveaus berechnet, bei denen ein oder mehrere Nukleonen in eine höhere Schale, z. B. 3d-Schale gehoben werden. Diese höher angeregten Zustände müssen sich durch eine deutliche Lücke in der Energieskala gegenüber den eben erwähnten niedrig angeregten Energieniveaus bemerkbar machen. Als Beispiele solcher Energiedifferenzen bei leichten Kernen sei der Energieabstand des He^5 ($J = 3/2^+$ -Term) gegenüber dem $2\text{p}_{1/2}$ -Term sowie der Energieabstand des angeregten Sauerstoff O^{16} -Terms ($J = 3/2^-$) gegenüber seinem Grundzustand genannt (l. c.¹).

Im Rahmen dieser Arbeit soll nun untersucht werden, ob auch diese höher angeregten Energieniveaus auf Grund unserer heutigen Kenntnisse über die Kernkräfte wenigstens in großen Zügen verstanden werden können. Dabei handelt es sich zunächst darum, solche Energieniveaus ausfindig zu machen, wo eine eindeutige Zuordnung der experimentell gemessenen Niveaus mit den theoretisch berechneten Energieniveaus auf Grund der Parität und der Spins dieser Zustände möglich ist. Dies ist deshalb von großer Bedeutung, da bei der derzeitigen Genauigkeit der Rechnungen eine eindeutige Zuordnung der theoretisch berechneten zu den experimentell ermittelten Energieniveaus auf Grund der Energieabstände allein nicht möglich ist. Als besonders geeignet hierfür bietet sich der Grundzustand von O^{16} und der angeregte Zustand dieses Kernes mit Spin $J = 3/2^-$ und negativer Parität sowie der Grundzustand von N^{16} ($J = 1^-$).

Wie experimentelle Untersuchungen von Chao⁴ und Arnold⁵ zeigen, liegt der vorhin erwähnte angeregte Zustand von O^{16} 6,13 MeV über dem Grundzustand von O^{16} . Weiter konnte Arnold aus der Polarisierung der bei der Reaktion



auftrtenden γ -Strahlung zeigen, daß dieser Term den vorhin angegebenen Wert $J = 3/2^-$ und negative Parität besitzt. Ferner geht der Grundzustand von N^{16} durch β -Emission in den eben genannten Anregungszustand von O^{16} über, während der Übergang in den Grundzustand von O^{16} verboten ist.

⁴ Chao, Tollestrup, Fowler u. Lauritsen, Phys. Rev. **79**, 108 [1950].

⁵ Arnold, Phys. Rev. **80**, 34 [1950].

⁶ Millard, Barthomolew u. Kinsey, Phys. Rev. **81**, 150 [1951].

Daraus schlossen Millard⁶ u. a., daß für den Grundzustand von N^{16} $J = 1^-$ und Parität $w = -1$ gilt. Es sei noch erwähnt, daß dicht unterhalb (80 keV tiefer) des von uns behandelten Terms $3/2^-$ ein weiterer Term mit $J = 0$ und positiver Parität gemessen wurde. Wir werden darauf noch kurz zu sprechen kommen.

Aufgabe unserer Untersuchung ist nun zunächst festzustellen, ob man das starke Absinken der Energie um 4,17 MeV vom Grundzustand des Kernes N^{16} gegen den angeregten Zustand von O^{16} einigermaßen gut beschreiben kann, wie den Abstand dieses Terms vom Grundzustand O^{16} . Nach dem groben Einteilchenmodell wäre ja zu erwarten, wie später noch genau gezeigt wird, daß der Grundzustand von N^{16} energetisch tiefer liegt als dieser angeregte Zustand von O^{16} , wegen der größeren Coulomb-Energie des O^{16} -Kerns. (Sie überwiegt die Massendifferenz von Neutron und Proton.)

Der hier eingeschlagene Weg ist der folgende^{7,8,3}: Zunächst werden auf Grund gruppentheoretischer Überlegungen mit Berücksichtigung des Pauli-Prinzips und der experimentell ermittelten Werte J und w zu den einzelnen Zuständen die Hartreeschen Näherungsfunktionen aufgestellt. Die Funktionen der einzelnen Nukleonen findet man mit Hilfe des Oszillatormodells, das eine erste Näherung darstellt. Die damit berechneten Erwartungswerte der Gesamtenergie, die sich aus kinetischer, potentieller und elektrostatischer Energie zusammensetzen, enthalten einen Parameter a , der mit der Frequenz des Oszillators zusammenhängt und die Größe der Kerne bestimmt. Nach dem Ritzschen Variationsverfahren zur approximativen Bestimmung der Eigenwerte werden schließlich die Werte dieses Parameters ermittelt, die sich als verschieden in den einzelnen Zuständen ergeben, weshalb die Variation dieses Parameters für eine genauere Rechnung wesentlich ist. Dadurch wird es erst möglich, die Energieniveaus benachbarter Kerne miteinander zu vergleichen. Die hier durchgeführte Untersuchung stellt eine Wiederaufnahme der von Heisenberg⁷, Volz⁹ und Flügge¹⁰ begonnenen Betrachtungen dar, welche durch die jüngste Vertiefung unserer Kenntnisse der Kernkräfte und Kernreaktionen berechtigt erscheint.

⁷ W. Heisenberg, Z. Phys. **96**, 473 [1935].

⁸ W. Heisenberg, Vorlesungen über Kernphysik, Sommer-Semester 1950.

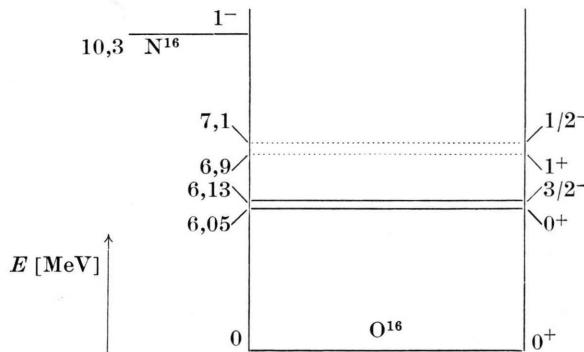
⁹ H. Volz, Z. Phys. **105**, 537 [1937].

¹⁰ S. Flügge, Z. Phys. **105**, 522 [1937].

Obwohl, wie sich nachher zeigt, die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment nicht befriedigend ist, können aus diesen Rechnungen und deren späterer Weiterführung wertvolle Rückschlüsse auf die Art und Größe der Kernkräfte gezogen werden. Einzelheiten der zum Teil recht langwierigen Rechnungen werden übergegangen.

1. Aufstellung der Näherungsfunktionen

An Hand der folgenden Zeichnung können wir uns einen Überblick über die Lage der experimentell ermittelten und uns hier interessierenden Energieniveaus der Kerne O^{16} und N^{16} verschaffen.



Alle Terme, dargestellt durch horizontale Linien, sind auf den Grundzustand von O^{16} bezogen, die Anregungsenergien (in MeV) sind jeweils an der linken Seite zu finden, während die Zahlenangaben rechts sich auf die Quantenzahl J des Gesamtdrehimpulses und auf den Spiegelungscharakter w ($= \pm 1$) beziehen. Von N^{16} wurde nur der Grundzustand eingetragen. Die Möglichkeit eines β -Überganges von N^{16} zu O^{16} rechtfertigt die Auffassung des erstgenannten Kernes als angeregten Zustand des letzteren.

Zunächst fällt an dem Schema der breite, von den Niveaus freie Raum zwischen dem Grundzustand des Sauerstoffs und seinem ersten angeregten Zustand bei etwa 6 MeV auf. Dies läßt sich qualitativ nach dem groben Schalenmodell verstehen, wonach bei O^{16} die 2p-Schale mit zweimal sechs Nukleonen voll besetzt und somit ein Zustand besonderer Stabilität erreicht ist. Halten wir an dieser Vorstellung fest, so sehen wir, daß sich die Kennzeichen $J = 3/2$, $w = -1$ des zweiten Anregungszustandes folgendermaßen deuten lassen: 2p-Nukleon (Proton oder Neutron) wandert in die 3d-Schale und läßt ein Loch in der 2p-Schale

(ungerader Parität) zurück. Damit ist die übliche Auffassung vom ersten Niveau (O^+) (80 keV unterhalb des $3/2^-$ -Niveaus), das der Anregung von zwei Partikeln entspricht, nicht ausgeschlossen, obwohl man meinen könnte, daß ein Zustand mit zwei gehobenen Partikeln höher liegen muß als ein solcher mit einem Teilchen. Jedoch können die im ersten Fall weit zahlreicheren Möglichkeiten der Zusammensetzung des Zustandes die Energie beträchtlich, sogar unter einen einfach angeregten Zustand, herabdrücken. Die Untersuchung dieses Niveaupaars sowie dessen Wiederholung bei 7 MeV (gestrichelte Niveaus) waren bereits früher Gegenstand von Untersuchungen^{11,12}. Wir wollen aber darauf hier nicht näher eingehen.

Den Energiesprung vom Grundzustand des Sauerstoffs zu dem des Stickstoffs wird man gleichfalls darauf zurückzuführen haben, daß die 2p-Schale aufgebrochen ist. Das fehlende Proton (beim angeregten O^{16} blieb es offen, ob Proton oder Neutron) wird in die 3d-Schale gehoben und geht gleichzeitig in ein Neutron über. In diesem Übergang Proton \rightarrow Neutron liegt, wenn man nur die Lage der Nukleonen betrachtet, der einzige Unterschied gegen die Konfiguration des angeregten Sauerstoffs. Trotzdem ist hier der Energieunterschied bedeutend größer, nämlich 10,3 MeV gegen rund 6 MeV bei O^{16} , was auf Grund der rohen Vorstellung von Partikeln im Oszillatortypotential unverständlich ist. Vielmehr könnte man aus der erhöhten elektrostatischen Abstoßung bei O^{16} auf die umgekehrte Lage der Terme schließen. Wir wollen nun untersuchen, ob man bei Verwendung des Hartreeschen Zentralmodells und Annahme einer strengen jj -Kopplung die Lage der stark eingezeichneten Energieniveaus angenähert erklären kann.

Bezeichnung der Nukleonfunktionen (die noch mit einem Faktor t^+ oder t^0 , entsprechend Proton oder Neutronzustand, multipliziert werden):

$$n \ 1_{2j, 2m} \quad \begin{cases} m = +j, \dots, -j \\ n = l + 1, l + 2, \dots \\ j = l \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$1 \ s_{1,1} = g(r) \delta^+; \quad 1 \ s_{1,-1} = g(r) \delta^-;$$

$$2 \ p_{1,1} = \sqrt{\frac{8a\pi}{3}} \left\{ -\sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^{(0)} \delta^+ + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^{(1)} \delta^- \right\} rg(r);$$

$$2 \ p_{1,-1} = \sqrt{\frac{8a\pi}{3}} \left\{ -\sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^{(-1)} \delta^+ + \sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^{(0)} \delta^- \right\} rg(r);$$

¹¹ M. Goeppert-Mayer, Phys. Rev. **78**, 22 [1950].

¹² Kurath, Phys. Rev. **80**, 98 [1950].

$$\begin{aligned}
2p_{3,3} &= \sqrt{\frac{8a\pi}{3}} Y_1^{(1)}(\vartheta, \varphi) \delta^+ r g(r); \\
2p_{3,1} &= \sqrt{\frac{8a\pi}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^{(0)} \delta^+ + \sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^{(1)} \delta^- \right\} r g(r); \\
2p_{3,-1} &= \sqrt{\frac{8a\pi}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^{(-1)} \delta^+ + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^{(0)} \delta^- \right\} r g(r); \\
2p_{3,-3} &= \sqrt{\frac{8a\pi}{3}} Y_1^{(-1)} \delta^- r g(r); \\
3d_{5,5} &= f(r) Y_2^{(2)} \delta^+; \\
g(r) &\equiv \left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/4} e^{-(a/2)r^2}; \quad f(r) \equiv \sqrt{\frac{16\pi}{15}} a r^2 g(r).
\end{aligned}$$

$Y_1^{(m)}$ sind die auf 1 normierten Kugelfunktionen, wie bei Rosenfeld, Blatt und Weißkopf^{13,14}, die δ^\pm geben die Spinorientierung der Partikeln an. Dem Pauli-Prinzip genügen die daraus gebildeten Slater-Determinanten.

Zwischen zwei Partikeln nehmen wir folgendes Wechselwirkungspotential an^{8,3}:

$$V(1,2) = wV_w + hV_h + bV_b + mV_m + \nu V_{SB} + V_C \quad (1)$$

$$\text{mit } V_w(1,2) = -V_0 J(r_{12}), \quad V_h = -P_\tau(1,2) V_w,$$

$$V_b = P_\sigma(1,2) V_w, \quad V_m = (-P_\tau) P_\sigma V_w,$$

$$V_{SB}(1,2) = \frac{V_0}{2\hbar\beta} \left\{ \vec{\sigma}^{(1)} [\text{grad}^{(1)} J(r_{12}) \times \vec{p}^{(1)}] + \vec{\sigma}^{(2)} [\text{grad}^{(2)} J(r_{12}) \times \vec{p}^{(2)}] \right\}, \quad *$$

$$V_C(1,2) = \frac{e^2}{4} \frac{1}{|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}|} (1 + \tau_3^{(1)}) (1 + \tau_3^{(2)}). \quad (1a)$$

Gute Quantenzahlen sind demnach J, M_J, M_T, w und näherungsweise T (wegen des geringen Einflusses der Coulomb-Energie). Wir suchen daher für die Kernzustände Näherungsfunktionen, die sich nach Darstellungen D_J und D_T der Drehungsgruppe transformieren und den Spiegelungscharakter w haben. Dabei können wir uns auf Funktionen zu $M_J = J$ und $M_T = 0$ (O^{16}) bzw. $M_T = -1$ (N^{16})** beschränken. Bei der Auswahl der Näherungsfunktionen beachten wir folgende Gesichtspunkte:

1. Zur Besetzung lassen wir außer der 1s-Schale noch die 2p-Schale mit $j = 1/2, 3/2$ und die Zustände $(n, l, j) = (3, 2, 5/2)$ zu.

2. Wir berücksichtigen nur jene Zustände, in denen höchstens ein Nukleon aus der p- in die d-

Schale gehoben ist, während die 1s-Schale stets voll besetzt sein soll.

Diese Voraussetzungen sind nach dem Oszillatormodell plausibel, da wird die Grundzustände der zwei Kerne und einen möglichst tief liegenden angeregten Zustand von O^{16} (zu den Werten $J = 3, w = 1$) erhalten wollen. Es ist klar, daß eine Hinzunahme weiterer Besetzungsmöglichkeiten die Ergebnisse ändern und die Energieniveaus herabdrücken wird. Die ohnedies recht langwierigen Rechnungen würden aber in diesem Fall noch weit umfangreicher werden. Wir gehen deshalb von folgenden Anordnungen der Nukleonen aus:

O^{16} (Grundzustand): die 1s- und 2p-Schale sind voll besetzt; dies ist im Rahmen unserer Näherung die einzige Möglichkeit, die Werte $J = 0, w = +1$ zu realisieren. Die zugehörige Slater-Determinante transformiert sich bei Drehung im Raum des isotopen Spins nach D_0 , somit $T = 0$.

O^{16} (angeregter Zustand): $w = -1$ hat zur Folge, daß ein Nukleon sich in der d-Schale befinden muß oder genauer, daß entweder die p-Protonenschale aufgebrochen ist und sich ein Proton in der d-Schale aufhält, oder analog für Neutronen. Von den Substraten, die sich bei Drehungen in Orts- und Spinraum nach D_3 transformieren, benötigen wir nur den Teil, der zu $M_J = 3$ gehört. Daher kommen folgende Determinanten f_i in Frage, für die wir nur das Nukleon der d-Schale und das fehlende Teilchen der p-Schale angeben.

	f_1	f_3	f_5
Neutron in der d-Schale	$3d^0_{5,5}$	$3d^0_{5,5}$	$3d^0_{5,3}$
Fehlendes Neutron der p-Schale	$2p^0_{1,-1}$	$2p^0_{3,-1}$	$2p^0_{3,-3}$
	f_2	f_4	f_6
Proton in der d-Schale	$3d^+_{5,5}$	$3d^+_{5,5}$	$3d^+_{5,3}$
Fehlendes Proton der p-Schale	$2p^+_{1,-1}$	$2p^+_{3,-1}$	$2p^+_{3,-3}$

In den Determinanten ordnen wir die Wellenfunktionen nach zunehmenden Schalen und innerhalb jeder Schale abwechselnd nach Protonen und Neutronen. Wir betrachten nun f_1, f_3, f_5

Schulten die in 1. Näherung vernachlässigbaren Terme weggelassen.

** In Abschn. 1 werden der Einfachheit halber mit J, M_J usw. von jetzt ab immer die doppelten Drehimpuls-Quantenzahlen usw. bezeichnet, wie bereits in der vorhergehenden Funktionentabelle angedeutet.

¹³ Rosenfeld, Nuclear Forces, Amsterdam (1948).

¹⁴ J. M. Blatt u. V. F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, New York 1952.

* Dieser Operator ist nicht invariant gegenüber einer Galilei-Transformation. Es wurden in ihm wie bei

und lassen den zweiten Index m alle möglichen Werte $(-j, \dots, +j)$ durchlaufen. Die aus f_1 entstehenden Funktionen transformieren sich nach

$$D_{5/2} \times D_{1/2} = D_3 + D_2,$$

wovon nur D_3 in Frage kommt; die Ausreduktion gibt als erste Funktion ($M_J = 3$) f_1 , was natürlich von vornherein klar ist. f_3 und f_5 ergeben

$$D_{5/2} \times D_{3/2} = D_4 + D_3 + D_2 + D_1$$

und zu D_3 das normierte Substrat, beginnend mit

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left\{ f_3 + \sqrt{\frac{3}{5}} f_5 \right\}, \quad M_J = 3.$$

Das Pauli-Prinzip unterdrückt hier keine Darstellung, da das „Loch“ und das hinzutretende d-Nukleon in verschiedenen Schalen liegen. Anderseits bildet f_1 zusammen mit f_2 und den beiden anderen Ladungskombinationen ein Substrat von

$$D_{1/2} \times D_{1/2} = D_1 + D_0 \quad (T = 0, 1)$$

und die Ausreduktion liefert

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_1 - f_2), \quad T = 0; \quad (2)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_1 + f_2), \quad T = 1. \quad (2a)$$

Genau so findet man aus $f_3, f_4 \dots$ nach Normierung

$$\psi_2 = \frac{1}{4} \sqrt{5} \left\{ f_3 - f_4 + \sqrt{\frac{3}{5}} f_5 - \sqrt{\frac{3}{5}} f_6 \right\}, \quad T = 0; \quad (3)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{4} \sqrt{5} \left\{ f_3 + f_4 + \sqrt{\frac{3}{5}} f_5 + \sqrt{\frac{3}{5}} f_6 \right\}, \quad T = 1. \quad (3a)$$

$T = 0$ deutet ein niedrigeres Niveau als $T = 1$ an; den Hauptteil an der Zusammensetzung des untersuchten Zustandes wird somit ψ_1 tragen, da in f_3, \dots ein p_3 -Nukleon fehlt und diese nach dem Oszillatormodell mit Spin-Bahn-Kopplung energetisch günstiger als die p_1 -Nukleonen liegen, wie sie in f_1, f_2 vorkommen. Wir beschreiben deshalb den Zustand durch ψ_1 allein und sehen von ψ_2 ab (dessen Berücksichtigung den nächsten Schritt in der Rechnung bedeuten würde).

N^{16} (Grundzustand): $J = 2, w = -1$.

Die p -Protonenschale ist aufgebrochen, die d-Schale enthält ein Neutron. Aus der Tabelle der Determinanten oben rechts auf dieser Seite findet man, ähnlich wie früher, die wichtigen Teile ($M_J = 2$) der Substrate zu den irreduziblen Bestandteilen D_2 ($J = 2$), während sich als Quantenzahl des isotopen Spins 1 ergibt.

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
Neutron Fehlen- des Proton	$3d^0_{5, 5}$	$3d^0_{5, 3}$	$3d^0_{5, 5}$	$3d^0_{5, 3}$	$3d^0_{5, 1}$

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{5}{6}} \left(f_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} f_2 \right) \quad T = 1. \quad (4)$$

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{10}{21}} \left(f_3 - \frac{2}{\sqrt{5}} f_4 - \sqrt{\frac{3}{10}} f_5 \right),$$

Am Aufbau der Zustandsfunktion wird — aus einem analogen Grund wie bei O^{16} — φ_1 am stärksten beteiligt sein, weshalb wir diese Funktion allein zur Beschreibung des Grundzustandes heranziehen.

2. Das Variationsverfahren

In den so konstruierten Näherungsfunktionen tritt ein Parameter $a = Mw/\hbar$ auf, der die Frequenz des Oszillators bestimmt und bisher nicht näher festgelegt wurde. Wir berechnen ihn nun für die drei Zustände, indem wir nach dem Ritzschen Variationsverfahren

$$\frac{\partial}{\partial a} \langle \psi | H | \psi \rangle = 0 \quad (5)$$

setzen.

H setzt sich aus den Operatoren für die kinetische und potentielle Energie zusammen, wozu noch die Coulomb-Energie der Protonen kommt. Die kinetische Energie besteht aus der Summe der Beiträge der einzelnen Nukleonen und wird einfach aus den Energiestufen des Oszillators berechnet. Dabei hat man jedoch noch die Transformation auf das Schwerpunktssystem vorzunehmen, was in allen drei Zuständen die Subtraktion der kinetischen Energie eines 1s-Partikels ($= 3/4$) bedeutet¹⁵. Die Coulomb-Energie

$$E_C = \langle \psi | H_C | \psi \rangle$$

ist der Erwartungswert des Operators

$$H_C = \frac{e^2}{4} \sum_{i < k} \frac{1}{|\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(k)}|} (1 + \tau_3^{(i)}) (1 + \tau_3^{(k)}) \quad (6)$$

und besteht, wie auch der Erwartungswert der potentiellen Energie, aus einem direkten Term und einem Austauschterm. Im Ansatz für die potentielle Energie (1), (1a), wählen wir für die Ortsabhängigkeit $J(r_{12})$ die Gaußsche Funktion

$$J(r_{12}) = e^{-\beta r_{12}^2}; \quad (7)$$

¹⁵ H. A. Bethe u. M. E. Rose, Phys. Rev. **51**, 283 [1937].

$1/\sqrt{\beta}$ ist die Reichweite der Kernkräfte. Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir nun folgende Gleichungen* zur Bestimmung der Energie der einzelnen Zustände und der zugehörigen Oszillatorenpotentialweiten a :

1. O¹⁶ (*Grundzustand*):

$$\begin{aligned} E^{(1)}(a) &= E_{\text{kin}}^{(1)} + E_{\text{pot}}^{(1)} + E_{\text{C}}^{(1)}, & \text{mit} \\ E_{\text{kin}}^{(1)} &= 17,25 \hbar \omega, \\ E_{\text{pot}}^{(1)} &= 8w(60v^2 + 144v + 93)E_0 \\ &+ 8m(24v + 93)E_0 + 192(b - \hbar)v(v + 2)E_0, \\ E_{\text{C}}^{(1)} &= 41,5 e^2 \sqrt{\frac{a}{2\pi}} = 59,81 \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \text{ MeV}, \\ &\text{in } 10^{26} \text{ cm}^{-2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Speziell wird mit $w = m$, $\hbar = b$:

$$E_{\text{pot}}^{(1)} = 16w(30v^2 + 84v + 93)E_0,$$

was wir später brauchen werden. Die Minimalgleichung zur Bestimmung von a lautet:

$$a \frac{\partial E^{(1)}}{\partial a} \equiv 17,25 \hbar \omega - 36wV_0(14v^2 + 26v + 31) \frac{v^{3/2}}{(v+2)^{9/2}} + 29,91 \sqrt{\frac{a}{2\pi}} = 0. \quad (9)$$

2. O¹⁶ (*angeregter Zustand*):

$$\begin{aligned} E^{(2)}(a) &= E_{\text{kin}}^{(2)} + E_{\text{pot}}^{(2)} + E_{\text{C}}^{(2)}, & \text{wobei} \\ E_{\text{kin}}^{(2)} &= 17,75 \hbar \omega & \text{und} \\ E_{\text{pot}}^{(2)} &= E_{\text{pot}}^{(1)} - \frac{4}{3}w(48v^2 + 73v + 40) \frac{E_0}{v+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{4}{3}\hbar(24v^2 + 20v + 8) \frac{E_0}{v+2} \\ &+ \frac{4}{3}b(4v^3 - 12v^2 - 4v + 8) \frac{E_0}{v+2} \\ &- \frac{4}{3}m(8v^3 + 12v^2 + 55v + 40) \frac{E_0}{v+2} \\ &+ \frac{8}{3}\varkappa(96v^3 + 220v^2 + 161v) \frac{E_0}{v+2}, \end{aligned}$$

$$E_{\text{C}}^{(2)} = 40,95 e^2 \sqrt{\frac{a}{2\pi}} = 59,02 \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \text{ MeV}. \quad (10)$$

Wieder mit $w = m$, $\hbar = b$ vereinfacht sich $E_{\text{pot}}^{(2)}$ zu

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}^{(2)} &= E_{\text{pot}}^{(1)} - \frac{16}{3}w(2v^2 + 11v + 10)E_0 \\ &+ \frac{16}{3}\hbar(v^2 + v + 2)E_0 \\ &+ \frac{8}{3}\varkappa(96v^3 + 220v^2 + 161v) \frac{E_0}{v+2}. \end{aligned}$$

* Hierbei wurde zur Abkürzung $v = a/\beta$ und $E_0 = -\frac{1}{4}V_0 \frac{v^{3/2}}{(v+2)^{7/2}}$ eingeführt.

Die (9) entsprechende Minimalgleichung lautet jetzt:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial E^{(2)}}{\partial a} &= 17,75 \hbar \omega - 36wV_0(14v^2 + 26v + 31) \frac{v^{3/2}}{(v+2)^{9/2}} \\ &+ \frac{4}{3}wV_0(3v^2 + 35v + 30) \frac{v^{3/2}}{(v+2)^{9/2}} \\ &- \frac{4}{3}\hbar V_0(6v^2 + v + 6) \frac{v^{3/2}}{(v+2)^{9/2}} \\ &- \frac{2}{3}\varkappa V_0(644v^2 + 1218v + 805) \frac{v^{5/2}}{(v+2)^{11/2}} \\ &+ 29,51 \sqrt{\frac{a}{2\pi}} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

3. N¹⁶ (*Grundzustand*):

$$\begin{aligned} E^{(3)}(a) &= E_{\text{kin}}^{(3)} + E_{\text{pot}}^{(3)} + E_{\text{C}}^{(3)}, \\ E_{\text{kin}}^{(3)} &= 17,75 \hbar \omega; \\ E_{\text{pot}}^{(3)} &= E_{\text{pot}}^{(1)} - \frac{4}{3}w(48v^2 + 73v + 52) \frac{E_0}{v+2} \\ &- 8\hbar(v^3 - v^2 + v) \frac{E_0}{v+2} \\ &+ \frac{8}{15}b(13v^3 - 21v^2 + 11v) \frac{E_0}{v+2} \\ &- \frac{4}{15}m(60v^3 + 144v^2 + 423v + 260) \frac{E_0}{v+2} \\ &+ \frac{8}{3}\varkappa(96v^3 + 220v^2 + 161v) \frac{E_0}{v+2}, \\ E_{\text{C}}^{(3)} &= 31,33 e^2 \sqrt{\frac{a}{2\pi}} = 45,15 \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (12)$$

Für $w = m$, $\hbar = b$ ergibt sich diesmal:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}^{(3)} &= E_{\text{pot}}^{(1)} - \frac{16}{15}w(15v^2 + 66v + 65)E_0 \\ &- \frac{16}{15}\hbar v(v+1)E_0 \\ &+ \frac{8}{3}\varkappa(96v^3 + 220v^2 + 161v) \frac{E_0}{v+2}. \end{aligned}$$

Die Minimalbedingung wird in diesem Falle:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial E^{(3)}}{\partial a} &= 17,35 - 36wV_0(14v^2 + 26v + 31) \frac{v^{3/2}}{(v+2)^{9/2}} \\ &+ \frac{4}{15}wV_0(39v^2 + 200v + 195) \frac{v^{3/2}}{(v+2)^{9/2}} \\ &+ \frac{4}{15}\hbar V_0(6v + 5) \frac{v^{5/2}}{(v+2)^{9/2}} \\ &- \frac{2}{3}\varkappa V_0(644v^2 + 1218v + 805) \frac{v^{5/2}}{(v+2)^{11/2}} \\ &+ 22,58 \sqrt{\frac{a}{2\pi}} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

3. Numerische Berechnung der Energiewerte und kritische Diskussion

Zur numerischen Berechnung der Energieniveaus müssen nun die Konstanten β ; V_0 ; w ; m ; h ; b ; \varkappa festgelegt werden.

Da die Festlegung dieser Konstanten aus experimentellen Daten über zwei Nukleonestreuversuche bzw. aus den Energieniveaus der ganz leichten Kerne D, He bis heute nur relativ ungenau ausgeführt werden kann, wollen wir die obigen Energieniveaus für verschiedene Wertesetupel ausrechnen, um einen Überblick dafür zu bekommen, wie die Lage dieser Energieniveaus von der Wahl der Konstanten abhängt.

a) Die Konstanten h , b und w , m werden so festgelegt, daß die Neutron-Proton-Streuversuche bei hohen (aber noch unrelativistischen) Energien richtig beschrieben werden. Es ergibt sich unter Berücksichtigung der Tensorkraft, die für das Quadrupolmoment des Deuterons verantwortlich ist (l. c.⁸, S. 60)

$$w = m = 0,634; \quad h = b = -0,134. \quad (14)$$

Das zur Beschreibung dieser Streuversuche verwendete Potential ist ein Exponentialpotential der Form $V_0 \exp(-r/R)$. Da bei unseren Rechnungen immer als Potential ein Gauß-Potential verwandt wird, wird die Potentialtiefe V_0 des Gauß-Potentials und seine Abfallsbreite β so bestimmt, daß die Bindungsenergie des Deuterons im Singulettzustand ($E_{\text{Sing}} = 0$) und die Bindungsenergie von He^4 ($E_{\text{He}^4} = 28,2 \text{ MeV}$) richtig herauskommen, wobei die Werte $w = m = 0,634$ und $h = b = -0,134$ beibehalten wurden. Es ergibt sich dann

$$V_0 = 31,08 \text{ MeV} \text{ und } \beta = 0,295 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}. \quad (15)$$

Die Spin-Bahn-Kopplungskonstante \varkappa wird aus der Energiedifferenz von He^5 ($J=1/2$) und He^5 ($J=3/2$) ($\approx 2,6 \text{ MeV}$) bestimmt. Aus der Formel

$$15 \varkappa V_0 \left(\frac{v}{v+2} \right)^{5/2} = 2,6 \text{ MeV} \quad (\text{l. c.}^3) \quad (16)$$

ergibt sich

$$\varkappa = 0,15. \quad (17)$$

Die Bestimmung der Spin-Bahn-Kopplungskonstanten \varkappa erscheint ziemlich problematisch, da die zu den oben erwähnten Energieniveaus gehörigen Zustände nicht stationär sind, sondern es sich dabei um Resonanzstreuiveaus handelt. Trotzdem wurde zur Herleitung der Konstanten \varkappa mit Oszillator-Wellenfunktionen gerechnet³. Das ist dann

* Durch die Spin-Bahn-Kopplung wird hauptsächlich die Struktur der Gesamtwellenfunktion wesentlich mitbestimmt, ohne daß es dabei auf die genaue Größe von \varkappa ankommt. Wir kommen darauf später noch einmal zurück.

berechtigt, wenn das Streunukleon oft im Kern hin- und herläuft, bevor es den Kern nach der Streuung wieder verläßt. Aus der Niveaubreite des $J = 3/2$ -Niveaus ($0,35 \text{ MeV}$)¹ folgt, daß das Streunukleon hier ungefähr 10- bis 20-mal im Kern hin- und herläuft. Die Annahme einer Oszillator-Wellenfunktion für das Streunukleon ist daher für dieses Niveau wenigstens näherungsweise berechtigt. Dagegen ist die Breite des $J = 1/2$ -Niveaus viel größer (genaue Daten fehlen), so daß hier die Beschreibung des Streunukleons durch eine Oszillator-Wellenfunktion sehr problematisch wird.

Es wird sich später zeigen, daß für die Schlußfolgerungen, die wir aus unseren Rechnungen ziehen, die genaue Größe der Spin-Bahn-Kopplungskonstanten nicht sehr wesentlich ist*, wir bleiben daher bei der oben erwähnten Bestimmung von \varkappa in Ermangelung von etwas Besserem.

Unter Verwendung der Gln. (8) bis (13) und den Konstanten (14) bis (17) ergeben sich dann folgende Energiewerte:

	$E_{\text{Bind.}} [\text{MeV}]$	$a [\text{cm}^{-2}]$	V
O^{16} Grundzustand	-245,43	$0,841 \cdot 10^{26}$	2,85
O^{16} angeregter Zustand	-253,80	$0,903 \cdot 10^{26}$	3,06
N^{16} Grundzustand	-250,31	$0,900 \cdot 10^{26}$	3,05

In der Bindungsenergie für N^{16} wie auch in allen späteren Daten für die Bindungsenergie von N^{16} ist bereits die Massendifferenz $M_{\text{H}} - M_{\text{P}} = 1,27 \text{ MeV}$ zwischen Proton und Neutron für das Außen-nukleon berücksichtigt. Als Energie-Nullpunkt ist immer die Energie von acht ruhenden freien Protonen und acht ruhenden freien Neutronen gewählt.

Betrachtet man diese Energiewerte, so sieht man zunächst, daß sämtliche Bindungsenergien ungefähr um einen Faktor 2 zu groß

$$(\text{O}^{16} \text{ Grundzust. exp.} = 125 \text{ MeV}),$$

also vollkommen falsch herauskommen. Berechnet man weiter mit den hier angegebenen a -Werten die zugehörigen Radien der Kerne (l. c.⁸, S. 31**), so ergibt sich für sämtliche Kerne der Radius ungefähr zu

$$R = 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

** Der Radius wird aus dem Wendepunkt der Teilchendichte eines Kerns bestimmt. In Anm. 8, S. 30, 31 wird a mit $1/2r_0^2$ bezeichnet.

während der Radius nach dem $A^{1/3}$ -Gesetz ungefähr $3,5 \cdot 10^{-13}$ cm ist.

Bei unseren Rechnungen kommen also die Bindungsenergien viel zu tief und die Radien der Kerne viel zu klein heraus. Das hängt damit zusammen, daß bekanntlich für die Kraftkonstanten, die man aus Streuversuchen erhält, die Absättigungsbedingung für die Kernkräfte nicht mehr erfüllt ist^{8,9}. Das heißt: Durch die lineare Überlagerung der Zweikörperkräfte wird die mittlere Potentialmulde für die Nukleonen viel zu tief, falls der Radius nur genügend klein ist.

Zudem ergeben unsere Rechnungen das unsinnige Ergebnis, daß die Zustände O^{16} angeregt und N^{16} Grundzustand energetisch tiefer liegen als der Grundzustand von O^{16} . Das erklärt sich wieder dadurch, daß wegen des zu kleinen Radius unserer berechneten Kerne durch die Überlagerung der Zweikörperkräfte nicht nur eine zu tiefe, sondern auch eine viel zu steile Potentialmulde entsteht und dadurch die Spin-Bahn-Kopplungsenergie (sie ist ja bei Parallelstellung von Spin und Bahn negativ), für die der Gradient der mittleren potentiellen Energie maßgebend ist, viel zu groß wird.

Aus diesen Betrachtungen sehen wir zunächst, daß bei Annahme von reinen Zweikörperkräften (deren Größe man aus Streuversuchen gewinnt), d. h. man vernachlässigt die Absättigung der Kernkräfte, bereits bei leichten Kernen die Berechnung der Energieniveaus zu völlig unsinnigen Resultaten führt. Weiter sei noch einmal erwähnt, daß der Hauptgrund für die vollständige Nichtübereinstimmung unserer Rechnungen mit dem Experiment darin zu suchen ist, daß wegen des zu nahen Zusammenrückens der Nukleonen im Kern die mittlere Potentialtiefe, die durch die Überlagerung der Zweikörperkräfte erzeugt wird, zu groß wird, solange wir z. B. keine Mehrkörperkräfte zur Erfüllung der Absättigung heranziehen.

Es ist daher zu vermuten, daß wir eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment erhalten, wenn wir den Radius der Kerne nach dem $A^{1/3}$ -Gesetz vorgeben (es wird also keine Variation des Radius durchgeführt), d. h. wir setzen

$$R = R_0 A^{1/3}; R_0 \approx 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (\text{l. c.}^8, \text{S. 11}),$$

da dann der mittlere Abstand der Nukleonen im Kern von der Größenordnung der Kernkraftreichweite

$$1/\sqrt{\beta} \approx 1,84 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad \text{ist.}$$

Im Mittel werden sich dann im wesentlichen immer nur zwei Teilchen im gegenseitigen Bereich ihrer Kernkraftreichweiten befinden, und das starke Absinken des mittleren Potentials durch die Zusammenballung der Nukleonen im Kern wird vermieden.

Setzen wir daher (l. c. ⁸, S. 31) die für die Energieberechnung wesentliche Größe a in unseren Gl. (8), (10), (12) und (16)

$$a = \frac{3,73}{2R_0^2 A^{2/3}} = 0,15 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2} \quad \text{oder} \quad v = \frac{a}{\beta} = 0,51,$$

so erhalten wir folgende Energiewerte:

	$E_{\text{bind.}}$
O^{16} Grundzustand	- 43,98 MeV
O^{16} anger. Zustand	- 37,16 MeV
N^{16} Grundzustand	- 36,89 MeV
$- R = R_0 A^{1/3} = 3,5 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$	

Wie man sieht, kommt diesmal wenigstens die energetische Reihenfolge der Zustände richtig heraus. Aber die Energien selbst werden jetzt viel zu klein. Das erscheint zunächst sehr merkwürdig, da man beim alleinigen Vorhandensein von Zweikörperkräften erwarten müßte, daß auch bei Vorgabe des richtigen Radius der Kerne die Bindungsenergien zumindest nicht zu klein herauskommen. Um den Grund für dieses Verhalten zu erkennen, betrachten wir kurz den Kern He^4 , dessen Bindungsenergie ja zur Festlegung der Kraftkonstanten mit herangezogen wurde.

Nach l. c. ⁸, S. 69, ergibt sich dort für He^4

$$a = 2\beta/0,84 = 0,7 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$$

und damit wird nach l. c. ⁸, S. 31,

$$R_{He^4} = 1/\sqrt{2a} = 0,85 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Nach dem $A^{1/3}$ -Gesetz ergibt sich für den Radius von $He^4 \approx 2,2 \cdot 10^{-13}$ cm. Daraus sehen wir, daß bereits die Energie von He^4 mit den obigen Kraftkonstanten viel zu klein herauskommt, wenn wir wieder den Radius nach dem $A^{1/3}$ -Gesetz vorgeben. Damit ist auch geklärt, warum bei unserer zweiten Berechnung die Energien viel zu klein herauskommen.

Dieser Sachverhalt läßt weiter darauf schließen, daß bereits beim Heliumkern die Absättigung der Kernkräfte, die wahrscheinlich durch Mehrkörperkräfte erzeugt wird, eine wesentliche Rolle spielt. Dies wird gleich noch deutlicher werden.

Wie aus den vorhergehenden Erläuterungen ersichtlich wurde, ist es ungünstig, die Bindungsenergie von He^4 zur Festlegung der Zweikörperkräfte heranzuziehen, da durch den Einfluß der Mehrkörperkräfte die Festlegung der Zweikörperkraftkonstanten wahrscheinlich stark verfälscht wird. Wir wollen daher für die Festlegung dieser Konstanten jetzt experimentelle Ergebnisse heranziehen, von denen wir hoffen können, daß für ihr Zustandekommen die Mehrkörperkräfte erst in zweiter Linie verantwortlich sind.

b) Die Konstanten $w = m$, $h = b$, β und α werden aus den Bindungsenergien des Deuterons im Singulett- und Triplettzustand und aus den Bindungsenergien des He^5 im $J = 1/2$ - und $J = 3/2$ -Zustand bestimmt. Hierbei vernachlässigen wir jetzt den Einfluß der Tensorkraft. Das ist im Rahmen unserer Näherungsbetrachtung gerechtfertigt, da wir auch bei der Berechnung der Energieterme von Sauerstoff und Stickstoff den Einfluß der Tensorkraft nicht berücksichtigen. Weiter wird beim He^5 -Kern der Radius vorgegeben, der sich recht gut aus dem Coulomb-Energieunterschied der beiden Spiegelkerne He^5 und Li^5 von 0,8 MeV bestimmen läßt. Nach unseren vorhergehenden Überlegungen ist dann anzunehmen, daß der Einfluß der Mehrkörperkräfte in erster Näherung vernachlässigt werden kann, da durch die Vorgabe des Radius ein zu starkes Zusammenballen der Nukleonen im Kern verhindert wird und die Mehrkörperkräfte dadurch nur wenig wirksam werden können.

Die Berechnung des Singulett- und Triplettzustands des Deuterons geschieht wieder mit Hilfe des Ritzschen Variationsprinzips (l. c.⁸, S. 66 ff.). Die Gleichungen für die beiden He^5 -Terme lassen sich sofort anschreiben*. Hier wollen wir nur die Ergebnisse für die aus diesen Beziehungen bestimmten Kraftkonstanten angeben. Man erhält:

$$w = m = 0,425; b = h = 0,075; \alpha = 0,084;$$

$$V_0 = 33 \text{ MeV}; \beta = 0,143 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}.$$

Rechnet man wieder die Energieterme sowohl mit als auch ohne Radiusvariation aus, so erhält man diesmal

α) mit Radiusvariation:

	$E_{\text{Bind.}}$ [MeV]	a [cm^{-2}]	v
O^{16} Grundzustand	— 345,31	$0,624 \cdot 10^{26}$	4,4
O^{16} anger. Zustand	— 362,29	$0,665 \cdot 10^{26}$	4,7
N^{16} Grundzustand	— 355,48	$0,659 \cdot 10^{26}$	4,6

β) ohne Radiusvariation:

	$E_{\text{Bind.}}$
O^{16} Grundzustand	— 144,58 MeV
O^{16} anger. Zustand	— 139,16 MeV
N^{16} Grundzustand	— 137,10 MeV

$$a = 0,15 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}; R = R_0 A^{1/3} = 3,5 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Betrachtet man zunächst die erste Tabelle, so sieht man, daß auch diesmal die Energiewerte viel zu tief herauskommen und zudem ihre Reihenfolge gegenüber den experimentellen Werten wieder vertauscht ist. Auch die Radien werden wieder viel zu klein. Es ergibt sich diesmal für den Radius von O^{16} und N^{16} ungefähr

$$R = 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

also ebenfalls wieder viel zu klein.

Betrachten wir dagegen die Energiewerte, die wir ohne Radiusvariation erhalten, so sehen wir, daß jetzt die theoretisch berechneten Energieterme nur ungefähr 10—20% tiefer liegen als die experimentellen Energieterme.

Dieses Ergebnis können wir so deuten, daß für die mittlere Lage der Energieniveaus in erster Linie Zweikörperkräfte verantwortlich sind, während die Mehrkörperkräfte, die nach Teller und Schiff¹⁶ hauptsächlich für die Absättigung der Kernkräfte verantwortlich sind, im wesentlichen verhindern, daß die Kerne in sich zusammenfallen. Diese Deutung wird durch Rechnungen von Schlögl¹⁷ und durch Rechnungen, die im Anschluß an diese Arbeit und die Arbeit von Schlögl am Institut für theoretische Physik der Universität München durchgeführt wurden¹⁸, unterstützt**. Schlögl konnte zeigen, daß die Konstante der Asymmetriekraft in der Bethe-Weizsäcker-Formel, durch die die Abhängigkeit der Bindungsenergien der Kerne vom Neutronen- bzw. Protonenüberschuß beschrieben wird, in erster Näherung (10—20% Genauigkeit) allein durch Zweikörperkräfte*** erklärt werden kann, wenn man

* Dies ist möglich mit den vom Institut für theoretische Physik der Universität Graz veröffentlichten Integralen.

¹⁶ Schiff, Phys. Rev. **84**, 1 [1951].

¹⁷ Schlögl, Z. Phys. **136**, 441 [1953].

¹⁸ W. Wild u. K. Wildermuth, Z. Naturforsch. **9a**, 799 [1954].

** Beide Rechnungen beziehen sich auf schwere Kerne.

*** Deren Konstante erhält man aus Streuversuchen.

nur den Radius der Kerne nach dem $A^{1/3}$ -Gesetz vorgibt.

Die Rechnungen, die am Institut für theoretische Physik der Universität München durchgeführt wurden, ergaben darüber hinaus, daß man auch die Oberflächenenergie und die Volumenenergie in der Bethe-Weizsäcker-Formel in erster Näherung (ebenfalls 10—20% Genauigkeit) durch Zweikörperkräfte erklären kann, falls man den Radius wieder nach dem $A^{1/3}$ -Gesetz vorgibt.

Betrachten wir nun die gegenseitige Lage der Energieniveaus in der 2. Tabelle, so sehen wir, daß die Reihenfolge der Niveaus richtig herauskommt, aber ihre gegenseitigen Abstände nur wenig befriedigend mit den experimentellen Ergebnissen (5,42 MeV:2,06 MeV statt 6,14 MeV:4,26 MeV) übereinstimmen. Im Rahmen dieser Rechnungen hat es auch keinen Wert, durch eine etwas andere Wahl der Kraftkonstanten eine bessere Übereinstimmung der gegenseitigen Abstände der Energieniveaus mit dem Experiment erreichen zu wollen, da diese Abstände recht empfindlich von dem Parameter a , d. h. von den Radien der Kerne abhängen. Die Variation dieses Parameters läßt aber nach vorhin die Kerne sofort in sich zusammenfallen. Um hier weiterzukommen, kann man versuchen, im Anschluß an Arbeiten von Schiff¹⁸ und Mittelstädt¹⁹ durch Hinzufügen eines nichtlinearen Mesonenfeldes zu den Zweikörperkräften im Hamilton-Operator die Absättigung der Kernkräfte zu erreichen, um damit auch Radiusvariationen bei der Berechnung der Energieniveaus durchführen zu können²⁰.

Und nun noch ein Wort dazu, daß man auch beim He^4 den Einfluß der Mehrkörperkräfte nicht

vernachlässigen kann. Berechnet man mit den zuletzt angegebenen Kraftkonstanten die Bindungsenergie von He^4 , wobei man eine Variation des Radius zuläßt, so ergibt sich für diese Bindungsenergie 37,9 MeV statt des experimentellen Wertes von 28,2 MeV. Für den Radius R erhält man ungefähr 10^{-13} cm statt $2,2 \cdot 10^{-13}$ cm nach dem $A^{1/3}$ -Gesetz.

Also auch der He^4 -Kern sackt bereits in sich zusammen, wenn man den Einfluß der Mehrkörperkräfte nicht mitberücksichtigt.

Zum Schluß sei noch kurz erwähnt, daß die Berechnung der Energieniveaus mit den von Schulten in seiner Arbeit angegebenen Konstanten für die Zweikörperkräfte sowohl mit als auch ohne Radiusvariation keinerlei Übereinstimmung mit dem Experiment ergibt. Daß bei Schulten trotzdem die Quadrupolmomente und die magnetischen Momente verschiedener leichter Kerne in recht guter Übereinstimmung mit dem Experiment herauskommen, liegt im wesentlichen daran, daß die Form der Eigenfunktionen, die für die Quadrupolmomente und magnetischen Momente der Kerne verantwortlich ist, im wesentlichen von der Spin-Bahn-Kopplung abhängt und hierbei in erster Näherung nur wichtig ist, daß überhaupt eine Spin-Bahn-Kopplung vorhanden ist.

Die Verhältnisse liegen hier ganz ähnlich wie bei den Eigenfunktionen des Heliumatoms. Für ihre Form ist in erster Näherung auch nur wichtig, daß die gegenseitige Wechselwirkung der Elektronen untereinander symmetrisch bzgl. der Elektronen ist.

Herrn Dr. R. Schulten danken wir vielmals, daß er uns seine Doktordissertation vor ihrer Veröffentlichung zur Verfügung stellte.

theoretische Physik der Universität München begonnen.

¹⁸ Mittelstädt, Z. Phys. **137**, 545 [1954].

²⁰ Rechnungen hierzu werden z. Zt. am Institut für